INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE APPLIQUEE ET DE PROSPECTION MINIERE

CONCOURS 1981

Composition de Mathématiques

La correction ne tiendra compte que des raisonnements clairs et lisiblement écrits. Un candidat qui n'aurait su démontrer un résultat partiel pourra, à condition de le préciser nettement, l'utiliser pour la suite. On précisera les méthodes de calcul utilisées en (II, 5°) et (III, 3°).

L'abréviation v.a.r. est mise pour "variable aléatoire réelle". L'espérance d'une variable aléatoire X est notée E[X]. On note p(X > a) la probabilité de l'événement (X > a).

e est la base des logarithmes népériens, et α un nombre positif donné.

I

1°/ Montrer que

a) $\forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + u \leqslant e^u$

b) $\forall u \in [-1, +1] \Rightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{u^{k-2}}{k!} < \frac{1}{4}$

On pourra remarquer que :

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < 2,75$$

c) $\forall u \in [-1, +1] \Rightarrow e^u \leqslant 1 + u + \frac{3u^2}{4}$

2°/ U étant une v.a.r. centrée de densité f, on suppose qu'il existe un réel positif d tel que la valeur absolue de U soit toujours inférieure ou égale à d,

et que la fonction de densité f soit continue sur]-d, +d[et nulle ailleurs. On note σ l'écart type de U.

a) Quelle est la densité de la v.a.r. $e^{\alpha U}$?

b) En supposant $\alpha d < 1$, montrer que

$$E(e^{\alpha U}) \leqslant 1 + \frac{3\alpha^2\sigma^2}{4} \leqslant e^{\frac{3\alpha^2\sigma^2}{4}}$$

3°/ On donne un nombre positif a, et on considère l'application φ de $\mathbb{R}$ dans {0, 1} définie par :

$$x \leqslant a \Rightarrow \varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad x > a \Rightarrow \varphi(x) = 1$$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(x) < e^{\alpha(x-a)}$

et en déduire que

$$E[\varphi(U)] \leqslant e^{-a\alpha} E[e^{\alpha U}]$$

b) Montrer que $E[\varphi(U)] = p(U > a)$

et en déduire que si

$$\alpha d < 1, \text{ alors } p(U > a) \leqslant e^{-a\alpha + \frac{3\alpha^2\sigma^2}{4}}$$

II

n étant entier supérieur à 1, on pose $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. On envisage n v.a.r. U_i, $(i \in I_n)$ indépendantes, centrées, de même loi, dont la densité commune f vérifie les propriétés du (I, 2°) ; σ est leur écart type commun.

1°/ Démontrer que les n v.a.r. $e^{\alpha U_i}$, $(i \in I_n)$ sont indépendantes ; en déduire l'espérance du produit des n v.a.r. $e^{\alpha U_i}$, notée $E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\alpha U_i}\right]$.

2°/ On pose $X = \sum_{i=1}^{n} U_i$

a) Calculer E(X). Calculer la variance s^2 de X en fonction de n et σ.

b) a étant positif donné, et φ l'application définie au (I, 3°), établir que :

$$p(X > a) \leqslant e^{-a\alpha} E(e^{\alpha X})$$

c) en supposant que $\alpha d < 1$,

établir que $$E(e^{\alpha X}) \leqslant \left(e^{\frac{3\alpha^2\sigma^2}{4}}\right)^n,$$

et enfin que $$p(X > a) \leqslant e^{-a\alpha + \frac{3n\alpha^2\sigma^2}{4}}$$

3°/ On pose $X' = -X$. Montrer que $(|X| > a) = (X > a) \cup (X' > a)$, et que, si $\alpha d < 1$,

$$p(|X| > a) \leqslant 2\, e^{-a\alpha + \frac{3n\alpha^2\sigma^2}{4}}$$

4°/ En posant $a = \lambda n$, en déduire enfin que :

$$\forall\, \lambda \in \left]0, \frac{3\sigma^2}{2d}\right[\Rightarrow p\left(\frac{|X|}{n} > \lambda\right) < 2\, e^{-\frac{n\lambda^2}{3\sigma^2}}$$

5°/ On suppose que les U_i sont des v.a.r. toutes de distribution uniforme sur $[-1, +1]$. Calculer l'espérance et la variance de chacune.

U_i étant l'abscisse d'un point M_i du segment $[-1, +1]$, quelle est l'abscisse g de l'isobarycentre G des n points M_i ?

On se propose de choisir n de manière que la probabilité de $(|g| \leqslant \frac{1}{100})$ dépasse 0,99. Soient n_1 et n_2 les plus petites valeurs de n déduites respectivement de la formule du (II, 4°) et de la formule de Bienaymé-Tchebitcheff. Calculer n_1, n_2 et $\frac{n_2}{n_1}$.

III

Soit Z une v.a.r. discrète prenant ses valeurs dans $D = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ où m est entier plus grand que 1. On suppose que $i < j$ entraine $z_i < z_j$. Soit d le plus grand des nombres $|z_i|$. On pose $p(Z = z_i) = p_i$. On suppose Z centrée (càd $\sum_{i=1}^{m} z_i p_i = 0$), et on pose $\sum_{i=1}^{m} z_i^2 p_i = \sigma^2$. On suppose $\alpha d < 1$. On donne a positif et on appelle z_k le plus grand élément de D inférieur ou égal à a. φ est l'application définie en (I, 3°).

1°/ Etablir que $\varphi(z_i) \leqslant e^{-\alpha d}\left(1 + \alpha z_i + \frac{3\alpha^2 z_i^2}{4}\right)$

puis que $$p(Z > a) \leqslant e^{-\alpha d}\left(1 + \frac{3\alpha^2\sigma^2}{4}\right)$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail